Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Instituto de Matemática - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Prof. Julio Cesar Lombaldo Fernandes

MAT01109 - Cálculo Diferencial e Integral

Prova Área 1 - Turma E3. (GABARITO)

- As questões devem ser assinaladas a caneta;
- No final da prova temos 4 folhas de rascunho;
- Toda questão é de múltipla escolha e possui apenas uma alternativa correta;
- Preencher a tabela abaixo com um X indicando a alternativa correta (questões não preenchidas na tabela serão consideradas nulas);

Nome:______________________________________ **Cartão:**______________

TABELA DE RESPOSTAS FINAIS:

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11
(a)					X						
(b)	X		X				X			X	
(c)		X						X			
(d)				X		X					
(e)									X		X
Pesos:	0,5	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Q1: (0,5) Considere a função:

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

É correto afirmar que:

(a) O domínio de $f(x)$ é $\mathbb{R}$ e a imagem é $\mathbb{R}$.

(b) O domínio de $f(x)$ é $\mathbb{R} - \{2\}$ e a imagem é $\mathbb{R} - \{0\}$.(X)

(c) O domínio de $f(x)$ é $\mathbb{R} - \{2\}$ e a imagem é $\mathbb{R}$.

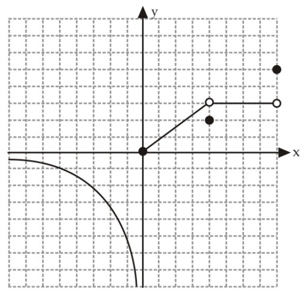
(d) O domínio de $f(x)$ é $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ e a imagem é $\mathbb{R} - \{0\}$.

(e) O domínio de $f(x)$ é $\mathbb{R} - \{2\}$ e a imagem é $\mathbb{R} - \{2\}$.

Solução:

Como $f(x)$ não está definida para $x = 2$ o mesmo não faz parte do domínio e em nenhum momento $f(x)$ assume o valor 0 (basta testar), logo o mesmo não faz parte da Imagem.

Q2: (1,0) Considere uma função $f(x)$ cujo o gráfico é representado abaixo. Responda com verdadeiro (V) ou falso (F) em cada lacuna de acordo com o gráfico (as linhas pontilhadas distam entre si uma unidade). Após marque a alternativa que apresenta a sequência correta.



I-(V) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

II-(F) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

III-(V) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

IV-(F) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$

V-(F) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$

VI-(V) $\lim_{x\to 8^-} f(x) = 3$

A sequência correta para I-II-II-IV-V-VI é:

(a) V-V-V-F-V-F.

(b) V-F-V-F-V-F.

(c) V-F-V-F-F-V.(X)

(d) V-F-V-V-V-F.

(e) F-V-V-F-F-V.

Q3: (0,5) Considere as seguintes funções:

$$f(x) = x^4, \quad g(x) = 2x^2 + 1, \quad h(x) = x^8 + x.$$

Pode-se dizer, respectivamente, que suas derivadas são:

(a) $f'(x) = x^3, \quad g'(x) = 2x, \quad h'(x) = x^7 + 1.$

(b) $f'(x) = 4x^3, \quad g'(x) = 4x, \quad h'(x) = 8x^7 + 1.$(X)

(c) $f'(x) = 4x^3, \quad g'(x) = 4x + 1, \quad h'(x) = 8x^7 + x.$

(d) $f'(x) = 3x^4, \quad g'(x) = 4x^2, \quad h'(x) = 7x^8.$

(e) $f'(x) = 4x^3, \quad g'(x) = 4x^2, \quad h'(x) = 8x^7 + 1.$

Solução:

Em todas funções basta usar a regra $[x^n]' = nx^{n-1}$.

Q4: (1,0) Considere as seguintes afirmações sobre limites:

$I.\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x+6}{x-2} = 1.$

$II.\ \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} = \frac{1}{8}.$

$III.\ \lim_{x\to 1} \frac{2}{x-1} = \nexists.$

É correto afirmarmos que:

(a) Apenas a alternativa I é verdadeira.

(b) Apenas a alternativa II é verdadeira.

(c) Apenas a alternativa III é verdadeira.

(d) As alternativas II e III são verdadeiras.(X)

(e) As alternativas I e III são verdadeiras.

Solução:

I-(F) pois $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+5x+6}{x-2} = \frac{\text{valor fixo}}{0} = +\infty.$

II-(V) pois $\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} = \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} . \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} = \lim_{x\to 16} \frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)} = \lim_{x\to 16} \frac{1}{\sqrt{x}+4} = \frac{1}{8}.$

III-(V) pois pela direita temos $\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1} = \frac{\text{valor fixo}}{0} = \frac{+}{+} = +\infty$ e pela esquerda temos $\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x-1} = \frac{\text{valor fixo}}{0} = \frac{+}{-} = -\infty.$

Q5: (1,0) Considere a função abaixo:

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

Sobre as características dessa função, podemos afirmar que:

(a) $f(x)$ tem assíntotas verticais e horizontais respectivamente dadas pelas equações $x = 2$ e $y = 3$, pois $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3.$(X)

(b) $f(x)$ tem assíntotas verticais e horizontais respectivamente dadas pelas equações $x = 3$ e $y = 2$, pois $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3.$

(c) $f(x)$ tem assíntotas verticais e horizontais respectivamente dadas pelas equações $x = 2$ e $y = 3$, pois $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2.$

(d) $f(x)$ tem assíntota vertical, mas não horizontal, dada pela equação $x = 2$, pois $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty.$

(e) $f(x)$ tem assíntotas horizontais, mas não vertical, dada pela equação $y = 3$, pois $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

Solução:

A alternativa correta é auto-explicativa.

Q6: (1,0) Considere a seguinte função:

$$h(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2x^3 + x}{x^2 + 1}$$

Utilizando uma ou mais das regras de derivação abaixo:

(1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

(2) $[\alpha f(x)]' = \alpha f'(x)$.

(3) $[f(x).g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(4) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Marque qual é a derivada de $h(x)$:

(a) $h'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{(6x+1)(x^2+1)-(2x^3+x)(2x)}{(x^2+1)^2}$.

(b) $h'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{(3x^2+1)(x^2+1)-(2x^2+x)(2x)}{(x^2+1)^2}$.

(c) $h'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{(6x^2+1)(x^2+1)-(2x^3+x)(2x)}{(x^2+1)^2}$.

(d) $h'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{(6x^2+1)(x^2+1)-(2x^3+x)(2x)}{(x^2+1)^2}$.(X)

(e) $h'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{(6x+1)(x^2+1)-(2x^3+x)(2x)}{(x^2+1)^2}$.

Solução:

Aplicação direta das regras de derivação.

Q7: (1,0) Considere a seguinte função:

$$h(x) = (x^7 + x^2)(2x^3 + 2)$$

Utilizando uma ou mais das regras de derivação abaixo:

(1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

(2) $[\alpha f(x)]' = \alpha f'(x)$.

(3) $[f(x).g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(4) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Marque qual é a derivada de $h(x)$:

(a) $h'(x) = (7x^6 + 2x)(2x^3 + 2) + (x^7 + x^2)(6x)$.

(b) $h'(x) = (7x^6 + 2x)(2x^3 + 2) + (x^7 + x^2)(6x^2)$.(X)

(c) $h'(x) = (7x + 2x)(2x^3 + 2) + (x^7 + x^2)(6x^2)$.

(d) $h'(x) = (7x^6 + 2x) + 6x^2$.

(e) $h'(x) = (7x^6 + 2x)(6x^2) + (x^7 + x^2)(2x^3 + 2)$.

Solução:

Aplicação direta das regras de derivação.

Q8: (1,0) Dadas as seguintes funções:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \quad g(x) = x^2 + x - 1, \quad k(x) = \begin{cases} 5 - x^2, x \geq 2 \\ x - 1, x < 2 \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações

$I.$ $f(x), g(x)$ **e** $k(x)$ **são contínuas;**

$II.$ **Apenas** $g(x)$ **é contínua;**

$III.$ **Existe** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **e vale 6.**

É correto afirmarmos que:

(a) Apenas a alternativa I é verdadeira.

(b) Apenas a alternativa II é verdadeira.

(c) Apenas a alternativa III é verdadeira. (X)

(d) As alternativas II e III são verdadeiras.

(e) As alternativas I e III são verdadeiras.

Solução:

I-(F) Temos que $f(x)$ não está definida para $x = 3$, logo não é contínua.

II-(F) Pois $k(x)$ também é contínua. A única possibilidade de descontinuidade é na troca de domínio, o que não ocorre, pois $\lim\limits_{x \to 2^+} 5 - x^2 = \lim\limits_{x \to 2^+} x - 1 = 1$ e $k(2) = 1$.

III-(V) Temos que $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} (x + 3) = 6$.

Q9: (1,0) Considere a função $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Pode-se dizer que a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = 4$ é dada por:

(a) $y = 2x - 2$.

(b) $y = 2x - 8$.

(c) $y = 4x + 8$.

(d) $y = 4x - 4$.

(e) $y = 4x - 8$.(X)

Solução:

Procuramos uma reta do tipo $y = mx + b$ onde $m = f'(4)$, como $f'(x) = \frac{1}{2}2x = x$ implica que $f'(4) = 4$ e portanto $m = 4$. Assim, a reta fica $y = 4x + b$. Usando que o ponto $(4, f(4))$ pertence também a reta e que $(4, f(4)) = (4, 8)$. Temos então que $8 = 4.4 + b$ e portanto $b = -8$. Assim a reta é $y = 4x - 8$.

Q10: (1,0) Considere a função $f(x) = \cos(x^2 + 1)$. Então pode-se dizer que a derivada de $f(x)$ é dada por:

(a) $f'(x) = -\sin(x^2 + 1)$.

(b) $f'(x) = -\sin(x^2 + 1).2x^2$.(X)

(c) $f'(x) = \sin(x^2 + 1).2x^2$.

(d) $f'(x) = \cos(2x)$.

(e) $f'(x) = \cos(x^2 + 1)2x$.

Solução:

Usando a regra da Cadeia que é $[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$ temos que ao fazer $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = x^2 + 1$, temos que as derivadas de cada uma, respectivamente são, $f'(x) = -\sin(x)$ e $g'(x) = 2x$. Portanto a derivada é $f'(x) = \sin(x^2 + 1).2x$.

OBS.: QUESTÃO ANULADA, POIS NÃO CONSTAVA NAS RESPOSTAS A OPÇÃO CORRETA.

Q11: (1,0) Considere a função $f(x) = \ln(x+1)$ e $g(x) = 3e^{2x}$. Então, respectivamente, suas derivadas são dadas por:

(a) $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = e^{2x}$.

(b) $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ e $g'(x) = 3e^{x}$.

(c) $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = 6e^{2x}$.

(d) $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ e $g'(x) = 3e^{2x}$.

(e) $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ e $g'(x) = 6e^{2x}$.(X)

Solução:

Usando a regra da Cadeia que é $[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$ temos que ao fazer $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$ e $[x+1]' = 1$, temos que a derivada é $f'(x) = \frac{1}{x+1}.1 = \frac{1}{x+1}$. No caso de $g(x)$, temos que ao fazer $[e^x]' = e^x$ e $[2x]' = 2$, temos que a derivada é $g'(x) = 3.e^{2x}.2 = 6e^{2x}$