Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Instituto de Matemática - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Prof. Julio Lombaldo Fernandes

MAT01068 - Análise Real I

RESOLUÇÃO - TRABALHO 1

(Esta resolução tem a intenção de auxiliar o aluno na disciplina de Análise Real I. Cada questão foi demonstrada e comentada de apenas uma maneira. O que não implica que a demonstração seja a única possível)

Questão 1. Mostre que se $m, n, p \in \mathbb{N}$ então $m + (n + p) = (m + n) + p$.

Demonstração:

Vamos definir um conjunto X de modo que $X = \{p \in \mathbb{N} : m, n \in \mathbb{N}, m + (n + p) = (m + n) + p\}$.

Passo 1: $\vdash 1 \in X$.

Como

$$m + (n + 1) = m + s(n) = s(m + n) = (m + n) + 1$$

Logo $1 \in X$.

Passo 2: $\vdash$ se $p \in X \Rightarrow s(p) \in X$.

$$m + (n + (p + 1)) = m + (n + s(p)) = m + s(n + p) = s(m + (n + p))$$

e usando a hipótese de indução, temos que

$$s(m + (n + p)) = s((m + n) + p) = (m + n) + s(p) = (m + n) + (p + 1)$$

Assim, temos que $s(p) = p + 1 \in X$ e $X = \mathbb{N}$.

Questão 2. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ com $a < b$. Mostre que, nesse caso, $ac < bc$.

Demonstração:

Vamos definir o conjunto $X = \{m \in \mathbb{N}/a < b \Rightarrow am < bm\}$ e mostrar que $X = \mathbb{N}$ pelo principio da indução.

Passo 1: $\vdash 1 \in X$.

Com efeito, tomamos

$$a.1 = a < b = b.1$$

Logo, $a.1 < b.1$. (Note que usamos a hipótese $a < b$).

Passo 2: $\vdash$ Se $n \in X$ então $n + 1 \in X$.

Note que

$$a(n+1) = an + a < bn + a < bn + b = b(n+1)$$

Logo, $n + 1 \in \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{N}$.

.

Questão 3. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Mostre que se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

Demonstração:

Pelo principio da boa ordenação se $a < b$ então existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$b = a + k_1$$

Por outro lado, se $b < c$ então existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$c = b + k_2$$

Logo, segue que

$$c = b + k_2 = (a + k_1) + k_2 = a + (k_1 + k_2) = a + k$$

onde $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{N}$. Sendo assim, segue que $a < c$, pois $c = a + k$.

.

Questão 4. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ com $a < b$. Mostre que $a^2 < b^2$.

Demonstração:

Como temos que $a < b$ e da questão 2 temos que $ac < bc$, basta tomarmos inicialmente $a = c$ e teremos que

$$a < b \Rightarrow a^2 < ba$$

Tomando agora $b = c$, temos que

$$a < b \Rightarrow ab < b^2$$

Assim, temos que

$$a < b \Rightarrow a^2 < ab < b^2$$

o que demonstra a proposição (supondo já válida a transitividade da boa ordenação).

Questão 5. Mostre que $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração:

Vamos iniciar definindo um conjunto X como sendo $X = \{n \in \mathbb{N}/1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}\}$ e vamos provar que $X = \mathbb{N}$ usando o principido da indução.

Passo 1: $\vdash 1 \in X$

Como a soma com um único elemento é exatamente

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1.2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Logo $1 \in X$.

Passo 2: $\vdash$ se $n \in X$ então $n + 1 \in X$.

Como podemos escrever

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + (n+1) &= 1 + 2 + ... + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{(pela hip.de indução)} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Logo $n + 1 \in X$ e consequentemente $X = \mathbb{N}$.

Questão 6. Mostre que a soma dos n primeiros termos ímpares é n^2. O que podemos dizer sobre a soma dos n primeiros pares?

Demonstração:

Precisamos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Passo 1: $\vdash$ vale a afirmação para $n = 1$.

Como $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = (2.1-1) = 1 = 1^2$. Logo vale.

Passo 2: $\vdash$ se vale para $n > 1$, então vale também para $n + 1$.

Partindo de

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1)$$

mas pela hipótese de indução, temos que

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+(2(n+1)-1) = n^2+(2(n+1)-1) = n^2+2n+2-1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

Assim, temos que a soma dos ímpares também é satisfeita para $n+1$. O que termina a demonstração.

Com relação a pergunta sobre os n primeiros pares, podemos escrever alguma comparação entre pares e ímpares. Por exemplo, escrevendo os 5 primeiros para cada caso teremos que

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5 &= 15 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 2+4 &= 6 \end{aligned}$$

Nesse caso, vemos que os pares mais os ímpares somados dão a soma dos n priemiros naturais (o que era de se esperar!!!). Mas podemos concluir que se conhecemos a soma dos n primeiros naturais e conhecemos (e provamos) a soma dos n primeiros ímpares, podemos estimar a soma dos n primeiros pares.

$$n \;\; \text{primeiros naturais} = n \;\; \text{primeiros pares} + n \;\; \text{primeiros ímpares}$$

Logo,

$$n \;\; \text{primeiros pares} = n \;\; \text{primeiros naturais} - n \;\; \text{primeiros ímpares}$$

Assim,

$$n \;\; \text{primeiros pares} = n(n+1)$$

Outra maneira de concluir a mesma afirmação é se pensarmos que a soma dos n primeiros pares será

$$2+4+6+8+...+2n$$

onde $2n$ é o n-ézimo par, temos que reescrevendo isso como

$$2+4+6+8+...+2n = 2(1+2+3+4+...+n) = 2.\frac{n(n+1)}{2}$$

pois $1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ é a soma fechada para os n primeiros números. Logo, pode-se concluir que a soma dos n primeiros pares é dada por

$$n(n+1)$$

o qual também é possível provar por indução.

.

Questão 7. Mostre que se $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n}$ pra todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Definindo um conjunto X como sendo

$$X = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n} \right\}$$

Passo 1: $\vdash 1 \in X$.

$$\frac{2^1}{1!} \leq \frac{4}{1} \Rightarrow 2 \leq 4$$

Logo $1 \in X$.

Passo 2: $\vdash$ se $n \in X$ então $n+1 \in X$.

Partindo de

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n.2}{(n+1)n!} = \frac{2}{n+1}\frac{2^n}{n!}$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$\frac{2}{n+1}\frac{2^n}{n!} \leq \frac{2}{n+1}\frac{4}{n} = \frac{2}{n}\frac{4}{n+1} \leq \frac{4}{n+1}$$

o último passo é possível por $2/n \leq 1$ justamente por tratarmos de $n > 1$. Assim, $n+1 \in X$ e $x = \mathbb{N}$.

.

Questão 8. Usando o conceito de cardinalidade, mostre que todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

Demonstração:

Em outras palavras o que devemos demonstrar é que, se, Y for algum subconjunto não vazio de um conjunto finito X, então $card(Y) \leq card(X)$ e que $card(Y) = card(X) \Leftrightarrow Y = X$.

Passo 1: $\vdash$ vale para $card(X) = 1$.

Começamos supondo X finito e não vazio. Se $card(X) = 1 \Rightarrow Y = X$ (por Y ser subconjunto não vazio).

Passo 2: Se $card(X) > 1$ e vamos supor que $card(X) = n$ e mostrar por indução que vale a afirmação para $n+1$.

Assim, supondo que $card(X) = n + 1$ e $Y \subseteq X$ com Y não vazio.

Se $Y = X$ ok! (pois $card(Y) = card(X)$ e vale para $n + 1$).

Se $Y \neq X$ vamor tomar um elemento de X, mas não de Y, digaos $k \in X - Y$. Assim $X - \{k\}$ é equipotente a $I_n = I_{n+1} - \{n + 1\}$ e $card(X - \{k\}) = n$. Como

$$Y \subseteq X - \{k\}$$

o que implica Y finito pela hipótese de indução. Logo,

$$card(Y) \leq card(X - \{k\}) = n$$

Assim, $card(Y) \leq n < n + 1 \Rightarrow card(Y) < n + 1$, ou seja, também vale para $n + 1$, o que completa a demonstração.