

LISTA DE EXERCÍCIOS 5 - ÁREA 3

Equações Diferenciais II - MAT01167 - EDP de Laplace

@ julio.lombaldo@ufrgs.br

📍 Campus do Vale - UFRGS - Sala B119

🌐 juliolombaldo.com



EDP DE LAPLACE - GABARITO

NÍVEL DA LISTA

Ex. 1. Assumimos separação de variáveis:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Substituindo na equação de Laplace:

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

Obtemos dois problemas:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, & X(0) &= 0, & X(a) &= 0 \\ Y'' - \lambda Y &= 0, & Y(0) &= 0 \end{aligned}$$

As soluções para X_n e λ_n são:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

Para cada n , a solução $Y_n(y)$ satisfaz:

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n = 0 \Rightarrow Y_n(y) = A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

A condição $u(x, 0) = 0 \Rightarrow Y_n(0) = 0 \Rightarrow$ sem termo $\cosh$

Solução geral:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Impondo a condição superior:

$$u(x, b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Coefficientes de Fourier:

$$B_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Portanto, a solução é:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(s) \sin\left(\frac{n\pi s}{a}\right) ds \right] \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Ex. 2. Considere o domínio $0 < x < L$, $0 < y < L$, e a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, & u(L, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, L) = 100. \end{cases}$$

Intuitivo
Gráfico
Dificuldade



Solução:

Usamos separação de variáveis:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Substituindo na equação:

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

Temos dois problemas:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, & X(0) &= 0, & X(L) &= 0 \\ Y'' - \lambda Y &= 0, & Y(0) &= 0 \end{aligned}$$

As soluções para $X_n(x)$ e os autovalores λ_n são:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Para cada n , temos:

$$Y_n(y) = A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

A condição $Y_n(0) = 0$ elimina o termo $\cosh$. Assim, a solução geral é:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Aplicando a condição superior $u(x, L) = 100$, obtemos:

$$100 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi L}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(n\pi) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Portanto, os coeficientes B_n são obtidos por:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L \sinh(n\pi)} \int_0^L 100 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ B_n &= \frac{200}{n\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{\sinh(n\pi)} \end{aligned}$$

(apenas termos ímpares).

Solução final:

$$u(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{400}{n\pi \sinh(n\pi)} \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ex. 3. Considere o domínio $0 < x < \pi$, $y > 0$, e a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

com as condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, & u(\pi, y) = 0, & y > 0 \\ u(x, 0) = \sin(x), & & 0 < x < \pi \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, & & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solução:

Usamos separação de variáveis: $u(x, y) = X(x)Y(y)$

Substituindo:

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

Obtemos dois problemas:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, & X(0) &= 0, & X(\pi) &= 0 \\ Y'' - \lambda Y &= 0, & \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

As soluções para $X_n(x)$ e λ_n são:

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad \lambda_n = n^2$$

A equação para Y_n é:

$$Y_n'' - n^2 Y_n = 0 \Rightarrow Y_n(y) = A_n e^{-ny} + B_n e^{ny}$$

A condição $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$ implica $B_n = 0$. Logo:

$$Y_n(y) = A_n e^{-ny}$$

Solução geral:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin(nx)$$

Usando a condição inicial $u(x, 0) = \sin(x)$, obtemos:

$$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \Rightarrow A_1 = 1, \quad A_n = 0 \text{ para } n \neq 1$$

Portanto, a solução é:

$$u(x, y) = e^{-y} \sin(x)$$

Ex. 4. Considere a equação de Laplace no retângulo $0 < x < \pi$, $0 < y < 2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

com as condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, & u(\pi, y) = 0, \\ u(x, 0) = \sin(3x), & u(x, 2) = 0. \end{cases}$$

Solução:

Utilizamos o método de separação de variáveis:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Substituindo na equação de Laplace:

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

Obtemos dois problemas:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, & X(0) &= 0, & X(\pi) &= 0 \\ Y'' - \lambda Y &= 0, & Y(0) &= 1, & Y(2) &= 0 \text{ (a ser ajustado via coeficiente)} \end{aligned}$$

As soluções para $X_n(x)$ são:

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad \lambda_n = n^2$$

As soluções para $Y_n(y)$ são:

$$Y_n(y) = A_n \sinh(n(2 - y)) \quad \text{ou} \quad A_n \sinh(ny)$$

Como queremos satisfazer $u(x, 2) = 0$, e $\sinh(n(2 - y))$ anula em $y = 2$, a forma conveniente é:

$$Y_n(y) = \sinh(n(2 - y))$$

Então a solução geral é:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(n(2 - y)) \sin(nx)$$

Aplicando a condição $u(x, 0) = \sin(3x)$, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(2n) \sin(nx) = \sin(3x) \Rightarrow A_3 = \frac{1}{\sinh(6)}, \quad A_n = 0 \text{ para } n \neq 3$$

Solução final:

$$u(x, y) = \frac{\sinh(3(2 - y))}{\sinh(6)} \sin(3x)$$