Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Instituto de Matemática - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Prof. Julio Lombaldo Fernandes

MAT01068 - Análise Real I
Lista 5 - Área 2

Sequências e suas propriedades

Questão 1. Dê exemplos de cada tipo de sequência:

(a) Crescente.

(b) Monótona Crescente.

(c) Decrescente.

(d) Monótona Decrescente.

(e) Oscilatória.

(f) Oscilatória.

(g) Com a propriedade $|s_n| \leq 1$.

(h) Com a propriedade $\lim s_n = \infty$.

(i) Com a propriedade $\lim s_n = 2$.

(j) Com a propriedade $\lim s_n = a$.

Questão 2. Mostre que em toda sequência convergente seu limite é único.

Questão 3. Considere a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{n^2}{n^2+1}$. Determine N tal que $\forall n > N$ temos

$$|s_n - 1| < \frac{1}{17}$$

Questão 4. Considere a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{n}{n+3}$. Determine N tal que $\forall n > N$ temos

$$|s_n - 1| < \frac{1}{20}$$

Questão 5. Mostre que para uma dada sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ crescente e limitada superiormente, teremos que essa sequência é convergente e o seu limite é dado por

$$b = \sup(X)$$

onde $X = \{s_1, s_2, ..., s_n, ...\}$.

Questão 6. Mostre que para uma dada sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente e limitada inferiormente, teremos que essa sequência é convergente e o seu limite é dado por

$$a = \inf(X)$$

onde $X = \{s_1, s_2, ..., s_n, ...\}$.

Questão 7. Mostre que toda sequência convergente é limitada.

Questão 8. Defina o que é uma sequência de Cauchy. Logo após, mostre que toda sequência de Cauchy é limitada e convergente.

Questão 9. Faça o que é pedido em cada item:

(a) Defina uma sequência limitada não convergente.

(b) Defina uma subsequência da sequência definida em (a) que seja convergente e explicitando a sequência crescente n_k.

(c) Defina outra subsequência da sequência definida em (a) que não seja convergente e explicitando a sequência crescente n_k.

Questão 10. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sequências convergentes, tais que $\lim x_n = x$ e que $\lim y_n = y$. Mostre cada uma das seguintes propriedades:

(a) $\lim(ax_n) = ax \ \forall a \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = x + y$.

(c) $\lim(x_n y_n) = \lim x_n . \lim y_n = xy$.

(d) Se $y \neq 0$, $\lim(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{x}{y}$.