Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Instituto de Matemática - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Prof. Julio Cesar Lombaldo Fernandes

MAT01169 - Cálculo Numérico

Lista de Exercícios Área 2 - Turma D1.

Questão 1: Considere as seguintes funções e calcule suas derivadas numericas de ordem 1 e 2 (regressiva, central e progressiva) e quando possível compare com o valor exato calculando o erro absoltuto.

(a) $f(x) = \sin(x^2)$ em $x = \pi/4$ com $h = 0.2$.

(b) $f(x) = e^{2x}$ em $x = 1$ com $h = 0.3$.

(c) $f(x) = x^{10}(x^4 - 24x)$ em $x = 2$ com $h = 0.2$.

(d) $f(x) = \log(x)$ em $x = 5$ com $h = 0.3$

(e) $f(x) = \cos(2x)$ em $x = 2.78\pi$ com $h = 0.1$

(f) $f(x) = x^3 e^{-x}$ em $x = 3$ com $h = 0.01$.

(g) $f(x) = \ln(x) + 1$ em $x = 7$ com $h = 0.1$.

Questão 2: Qual seria a aproximação de uma derivada numérica de ordem 2 se para a primeira ordem aproximarmos de maneira regressiva e depois de maneira central?

Questão 3: Dada a seguinte integral

$$\int_0^2 x^2 - x + 5dx$$

Aproximando via método de Riemann a direita, qual o valor encontrado para $h = 0.1$?

Questão 4: Dada a seguinte integral

$$\int_{\pi/2}^{\pi/4} x\sin(x)dx$$

Aproximando via método de Riemann a esquerda, qual o valor encontrado para $h = 0.01$?

Questão 5: Dada a seguinte integral

$$\int_2^7 \ln(x)dx$$

Aproximando via método de Riemann ponto médio, qual o valor encontrado para $h = 0.1$?

Questão 6: Considere a seguinte integral

$$\int_1^3 x^3 + x dx$$

Utilizando o método dos trapézios com $h = 0.1$ e $h = 0.01$, quais os valores encontrados?

Questão 7: Considere a seguinte integral

$$\int_1^4 e^x + x^2 dx$$

(a) Para que o erro seja de ordem menor que 10^{-3} calcule o número de intervalos que devemos utilizar pelo método dos Trapézios.

(b) Com o número de intervalos do item anterior, calcule via método dos trapézios a integral acima.

Questão 8: Considere a seguinte integral

$$\int_1^{10} x \ln(x) dx$$

Utilizando o método de Simpson com $h = 0.5$ e $h = 0.1$, quais os valores encontrados, respectivamente?

Questão 9: Considere a seguinte integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$$

(a) Para que o erro seja de ordem menor que 10^{-4} calcule o número de intervalos que devemos utilizar pelo método de Simpson.

(b) Com o número de intervalos do item anterior, calcule via método de Simpson a integral acima.

Questão 10: Encontre uma quadratura adequada para calcular de maneira exata a integral de polinômios de grau 3 num intervalo de 0 até h.

Questão 11: Encontre uma quadratura adequada para calcular de maneira exata a integral de polinômios de grau 4 num intervalo de 0 até h usando os pontos $0, 0.2h, 0.4h, 0.5h, h$.

Questão 12: Calcule a integral abaixo

$$\int_0^3 x \ln(x+1) dx$$

(a) Usando a aproximação dos trapézios com 10 intervalos.

(b) Usando o método de Simpson com 6 intervalos.

(c) Usando quadratura gaussiana com 3 nós.

(d) Sabendo que o resultado exato é 4.7951774, compare os resultados usando o erro absoluto e diga qual é o melhor.

Questão 13: Dada a integral abaixo

$$\int_0^2 e^x \cos(x) dx$$

(a) Calcule usando quadratura gaussiana com 2 nós.

(b) Calcule usando quadratura gaussiana com 3 nós.

(c) Calcule usando quadratura gaussiana com 4 nós.

Questão 14: Calcule integral abaixo usando quadratura gaussiana com 4 nós.

$$\int_1^2 \frac{1}{1+x^3} dx$$

Questão 15: Dada a função

$$f(t) = \int_0^t \frac{2x^2}{1+e^x} dx$$

(a) Aproxime $f(1)$ usando quadratura gaussiana com 3 nós.

(b) Aproxime $f(2)$ usando quadratura gaussiana com 3 nós.

(c) Aproxime $f(3)$ usando quadratura gaussiana com 3 nós.

Questão 16: Dado o PVI

$$\begin{aligned} u'(t) &= 2u + t \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

(a) Aproxime a solução no intervalo $[0, 2]$ usando 20 pontos pelo método de Euler.

(b) Aproxime $u(3)$ usando $h = 0.1$ pelo método de Euler.

(c) Compare o valor do item anterior com o exato.

Questão 17: Dado o PVI

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{ut}{2} \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

(a) Aproxime a solução no intervalo $[0,1]$ usando 40 pontos pelo método de Euler.

(b) Aproxime $u(2)$ usando $h = 0.1$ pelo método de Euler.

(c) Aproxime $u(2)$ usando $h = 0.01$ pelo método de Euler.

(d) Compare o valor dos últimos dois itens com o exato $u(t) = e^{t^2}/4$.

Questão 18: Dado o PVI

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{t-u}{t} \\ u(2) &= 3 \end{aligned}$$

(a) Aproxime a solução no intervalo $[2,4]$ usando 10 pontos pelo método de Euler.

(b) Aproxime $u(5)$ usando $h = 0.2$ pelo método de Euler.

(c) Aproxime $u(5)$ usando $h = 0.1$ pelo método de Euler.

Questão 19: Considerando um modelo logístico de crescimento populacional que tem por definição a EDO dada por

$$N' = rN(1 - \frac{N}{K})$$

onde N é a população de uma cerca cultura, r a taxa de crescimento natural e K a capacidade suporte do meio. Então considerando t dado em anos, aproxime a população após 2 anos com e $r = 2$ e capacidade suporte do meio de $K = 10000$ com população inicial de 2000 usando o método de Euler. Faça um gráfico e iterprete o resultado dizendo o que tende a acontecer com o aumento dos anos.

Questão 20: Dado o PVI

$$\begin{aligned} u'(t) &= u - t^2 + 1 \\ u(0) &= 0.5 \end{aligned}$$

(a) Aproxime a solução no intervalo $[0,3]$ usando $h = 0.1$ pelo método de Euler.

(b) Aproxime a solução no intervalo $[0,3]$ usando $h = 0.1$ pelo método de Taylor de ordem 2.

Questão 21: Dado o PVC

$$\begin{aligned} u'' &= t^2 u - 5u' \\ u(0) &= 1 \\ u(2) &= 2 \end{aligned}$$

(a) Usando as aproximações $u' = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}$ e $u'' = u' = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$ monte o sistema que aproxima numericamente a solução desse PVC.

(b) Usando $h = 0.1$ e $n = 5$, aproxime essa solução.

Questão 22: Dado o PVC

$$\begin{aligned} u'' &= 2u - 4u' + t^2 \\ u(0) &= 0.5 \\ u(3) &= 1 \end{aligned}$$

(a) Usando as aproximações $u' = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}$ e $u'' = u' = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$ monte o sistema que aproxima numericamente a solução desse PVC.

(b) Usando $h = 0.1$ e $n = 5$, aproxime essa solução.