LISTA DE EXERCÍCIOS 4 - ÁREA 3

Equações Diferenciais II - MAT01167 - EDP da Onda

@ julio.lombaldo@ufrgs.br   Campus do Vale - UFRGS - Sala B119   juliolombaldo.com

EDP DA ONDA - GABARITO

NÍVEL DA LISTA

Intuitivo
Gráfico
Dificuldade

Ex. 1. Assumimos uma solução da forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Substituindo na equação:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Obtemos dois problemas de autovalores:

- Equação para $X(x)$:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0$$

  cujas soluções são:

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Equação para $T(t)$:

$$T_n'' + c^2n^2T_n = 0 \Rightarrow T_n(t) = A_n\cos(cnt) + B_n\sin(cnt)$$

Logo, a solução geral é:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\cos(cnt) + B_n\sin(cnt))\sin(nx)$$

Condição inicial 1: $u(x,0) = \sin(x)$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(0)\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx) \Rightarrow A_1 = 1, \quad A_n = 0 \text{ para } n \geq 2$$

Condição inicial 2: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-A_ncn\sin(cnt) + B_ncn\cos(cnt))\sin(nx)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_ncn\sin(nx) = 0 \Rightarrow B_n = 0 \text{ para todo } n$$

Portanto, a solução é:

$$\boxed{u(x,t) = \cos(ct)\cdot\sin(x)}$$

Ex. 2. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 40, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Buscamos soluções da forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(c\omega_n t) + B_n \sin(c\omega_n t)\right] \phi_n(x)$$

As autofunções $\phi_n(x)$ e autovalores ω_n são obtidos do problema de Sturm–Liouville:

$$\phi'' + \lambda\phi = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(L) = 0$$

A solução é:

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right), \quad \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Expansão da condição inicial $u(x,0) = 40$
Vamos expandir a constante 40 em série de senos ímpares:

$$40 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Os coeficientes A_n são dados por:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L 40 \cdot \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx$$

Fazendo a integral:

$$A_n = \frac{80}{(2n-1)\pi}\left[-\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \cdot \frac{2L}{(2n-1)\pi}\right]_0^L = \frac{160L}{(2n-1)^2\pi^2}\left[1 - (-1)^n\right]$$

Logo, $A_n = 0$ para n par, e:

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{320L}{(2n-1)^2\pi^2}, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

3. Condição $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$

$$\Rightarrow B_n = 0 \text{ para todo } n$$

Solução final

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{320L}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right) \cdot \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)}$$

Ex. 3. Considere o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x(1-x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Separação de variáveis
Buscamos soluções da forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(c\omega_n t) + B_n \sin(c\omega_n t)\right) \phi_n(x)$$

As autofunções e autovalores são soluções do problema de Sturm–Liouville:

$$\phi'' + \lambda\phi = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(1) = 0$$

As soluções são:

$$\phi_n(x) = \sin(\mu_n x), \quad \mu_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \omega_n = \mu_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$$

Expansão da condição inicial:

$$u(x,0) = x(1-x)$$

Expandimos $u(x,0)$ em série de senos $\phi_n(x) = \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right)$
Os coeficientes A_n são dados por:

$$A_n = \int_0^1 x(1-x) \cdot \sin\left(\left(n - \tfrac{1}{2}\right)\pi x\right) dx$$

Esta integral pode ser resolvido por partes ficando:

$$A_n = \frac{8}{[(2n-1)^3\pi^3]}$$

Observação: Isso vale para todo $n \geq 1$.
Como $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, temos:

$$B_n = 0 \quad \text{para todo } n$$

Solução final

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} \cos((2n-1)\pi ct) \sin((2n-1)\pi x)}$$

Ex. 4. Temos o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

por Separação de variáveis, temos que buscar soluções da forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(c\omega_n t) + B_n \sin(c\omega_n t)\right] \phi_n(x)$$

As autofunções $\phi_n(x)$ e autovalores ω_n são obtidos do problema de Sturm–Liouville com:

$$\phi'' + \lambda\phi = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi(L) = 0$$

A solução geral é:

$$\phi_n(x) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right), \quad \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Condições iniciais
Como $u_t(x,0) = 0 \Rightarrow B_n = 0$.
Expandimos a condição inicial $u(x,0) = x$ em série de $\phi_n(x)$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Os coeficientes são dados por:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx$$

Fazendo essa integral (por partes ou usando uma tabela):

$$A_n = \frac{4L}{\pi^2(2n-1)^2} \cdot (-1)^{n+1}$$

Solução final

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{\pi^2(2n-1)^2}(-1)^{n+1} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right) \cdot \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)}$$