Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Instituto de Matemática - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Prof. Julio Cesar Lombaldo Fernandes

MAT01355 - Álgebra Linear

Prova Área 1 - Turma E2: (GABARITO)

- As questões devem ser assinaladas a caneta;
- No final da prova temos 4 folhas de rascunho;
- Toda questão é de múltipla escolha e possui apenas uma alternativa correta;
- Preencher a tabela abaixo com um X indicando a alternativa correta (questões não preenchidas na tabela serão consideradas nulas);

Nome:____ **Cartão:**____________

TABELA DE RESPOSTAS FINAIS:

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
(a)				X			X	X		
(b)										X
(c)						X				
(d)		X	X						X	
(e)	X				X					
Pesos:	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Q1: (1,0) Considere a matriz completa de um sistema linear do tipo $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & h & -1 \end{bmatrix}$$

É correto afirmar que:

(a) Se $h = 5$, o sistema não é possível.

(b) Se $h = 12$, o sistema não é possível.

(c) Se $h = -4$, o sistema não é possível.

(d) Se $h = -5$, o sistema não é possível.

(e) Se $h = -12$, o sistema não é possível.(X)

Solução:

Como $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & h & -1 \end{bmatrix}$ ao escalonar fica $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & h+12 & 5 \end{bmatrix}$ teremos que se $h = -12$ o sistema se torna impossível.

Q2: (1,0) Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então pode-se dizer que:

(a) O sistema acima não possui solução se $a = -2$.

(b) O sistema acima possui uma única solução quando $a = -2$.

(c) O sistema acima não possui solução se $a = 2$.

(d) O sistema acima possui infinitas soluções se $a = -2$. (X)

(e) Nenhuma das alternativas anteriores.

Solução:

Como $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ ao escalonar fica $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 \end{bmatrix}$ teremos que se $a = -2$ resulta numa linha de zeros o que implica que teremos uma variável livre e consequentemente infinitas soluções.

Q3: (1,0) Seja T uma transformada linear definida por $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ com matriz A de ordem 5×3, então:

(a) T é uma transformada que leva vetores do domínio $\mathbb{R}^5$ para o contra-domínio $\mathbb{R}^3$.

(b) T é uma transformada que leva vetores do domínio $\mathbb{R}^5$ para o contra-domínio $\mathbb{R}^{15}$.

(c) T é uma transformada que leva vetores do domínio $\mathbb{R}^{15}$ para a imagem $\mathbb{R}^5$.

(d) T é uma transformada que leva vetores do domínio $\mathbb{R}^3$ para o contra-domínio $\mathbb{R}^5$.(X)

(e) T é uma transformada que leva vetores do domínio $\mathbb{R}^3$ para a imagem $\mathbb{R}^3$.

Solução:

Para que a transformada faça sentido, precisamos aplicar uma multiplicação de uma matriz de ordem 5×3 e um vetor de três coordenadas, isto é, em um $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$. Assim $A_{5\times3}\vec{x}_{3\times1}$ resulta em um vetor de 5 coordenadas, isto é, em um $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^5$.

Q4: (1,0) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformada linear com matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos dizer então que T é uma tranformada que:

(a) Realiza um cisalhamento horizontal de 4 unidades.(X)

(b) Realiza uma rotação no sentido horário de um ângulo de 4º.

(c) Realiza um cisalhamento vertical de 4 unidades.

(d) Realiza uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo de 4º.

(e) Realiza uma projeção das coordenadas no eixo x.

Solução:

Ao aplicarmos uma transformação acima em um vetor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Teremos que $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$ acarretando um aumento apenas na variável correspondente ao eixo x_1. Logo, um cisalhamento horizontal de 4 unidades.

Q5: (1,0) Dentre as tantas fatorações matriciais existentes, encontra-se a fatoração LU, cuja a ideia principal é:

(a) Transformar A em um produto matricial da forma LU com L triangular superior e U diagonal e resolver sistemas do tipo $A\vec{x} = \vec{b}$ fazendo $L\vec{x} = \vec{b}$ e posteriormente $U\vec{y} = \vec{x}$.

(b) Transformar A em uma soma matricial da forma $L+U$ com L triangular inferior e U triangular superior e resolver sistemas do tipo $A\vec{x} = \vec{b}$ fazendo $L\vec{y} = \vec{b}$ e posteriormente $U\vec{x} = \vec{y}$.

(c) Transformar A em um produto matricial da forma LU com L triangular inferior e U triangular superior e resolver sistemas do tipo $A\vec{x} = \vec{b}$ fazendo $L\vec{x} = \vec{b}$ e posteriormente $U\vec{y} = \vec{x}$.

(d) Transformar A em uma soma matricial da forma $L+U$ com L triangular superior e U triangular inferior e resolver sistemas do tipo $A\vec{x} = \vec{b}$ fazendo $L\vec{y} = \vec{b}$ e posteriormente $U\vec{x} = \vec{y}$.

(e) Transformar A em um produto matricial da forma LU com L triangular inferior e U triangular superior e resolver sistemas do tipo $A\vec{x} = \vec{b}$ fazendo $L\vec{y} = \vec{b}$ e posteriormente $U\vec{x} = \vec{y}$.(X)

Solução:

A alternativa correta é auto-explicativa.

Q6: (1,0) Considere os seguintes vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -11 \end{bmatrix}$$

O que podemos dizer a respeito do $Span\{v_1, v_2, v_3\}$:

(a) $Span\{v_1, v_2, v_3\}$ é o $\mathbb{R}^1$.

(b) $Span\{v_1, v_2, v_3\}$ é o $\mathbb{R}^3$.

(c) $Span\{v_1, v_2, v_3\}$ é um plano.(X)

(d) $Span\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma transformada $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(e) $Span\{v_1, v_2, v_3\}$ é igual $Span\{v_1\}$.

Solução:

Se v_1, v_2, v_3 forem linearmente independentes será o $\mathbb{R}^3$, mas se ao memonos um deles for combinação de outros dois pode ser um plano. Para verificar, devemos resolver $A\vec{x} = 0$ com as colunas de A sendo v_1, v_2, v_3 ou $A\vec{x} = \vec{b}$ sendo $\vec{b}$ um dos vetores e as colunas de A os outros dois. Se encontrarmos solução indica que são linearmente dependentes e que o $span\{v_1, v_2, v_3\}$ será no máximo um plano. Fazendo $A\vec{x} = \vec{b}$, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -11 \end{bmatrix} (L_2 + L_3) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -12 \end{bmatrix} (2L_1 + L_2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$

A partir daqui vemos que as linhas 2 e 3 indicam a mesma informação. Na linha 2 que $-3x_2 = 9$ e que $x_2 = -3$. Na linha 3 que $3x_2 = -12$ e que $x_2 = -3$. Pela linha 1 temos que $x_1 - x_2 = 5$ ou ainda que $x_1 = 5 + x_2 = 5 - 3 = 2$. Assim existe solução, a saber, $x_1 = 2$ e $x_3 = -3$ o que mostra que v_3 é combinação linear de v_1 e v_2 (Teste os valores!). Como v_1 e v_2 não são múltiplos, o $span\{v_1, v_2, v_3\}$ é um plano.

Q7 (1,0). Seja A a matriz 3×3 cujo queremos obter sua inversa através do "algoritmo da inversa". Fazendo como matriz completa $[A|I]$ tornar-se via operações elementares $[I|A^{-1}]$. Após o início do cálculo de uma matriz inversa, um estudante de álgebra linear parou no seguinte estágio:

$$[A|I] = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Terminando esse algoritmo, chegaremos que a inversa dessa matriz é dada por:

(a) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.(X)

(b) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Solução:

Terminado a conta temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} (\frac{1}{2}L_3+L_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} (-2L_3+L_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Q8.(1,0) No que segue, seja A uma matriz 4×3. Considere as seguintes afirmações

I. **Essa matriz possui mais linhas que colunas;**

II. **Essa matriz possui inversa;**

III. **Existe $A^T A$.**

É correto afirmarmos que:

(a) As alternativas I e III são verdadeiras.(X)

(b) Apenas a alternativa II é verdadeira.

(c) Apenas a alternativa III é verdadeira.

(d) As alternativas II e III são verdadeiras.

(e) Apenas a alternativa I é verdadeira.

Solução:

I-(V) Pois $4 > 3$.

II-(F) Apenas matrizes do tipo $A_{n\times n}$ possuem inversas.

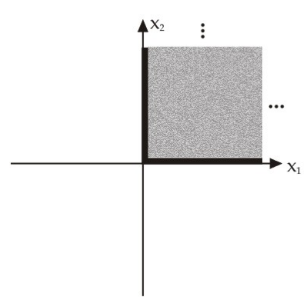
III-(V) Pois A^T tem ordem 3×4 e produto $A^T_{3\times 4}A_{4\times 3}$ é possível.

Q9 (1,0). Considere as afirmativas abaixo a respeito de subespaços do $\mathbb{R}^n$:

I. **Um plano qualquer que passa pela origem de $\mathbb{R}^3$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.**

II. **A reta dada pela equação $y = 2 - 2x$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.**

III. **A região hachurada abaixo é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.**



É correto afirmarmos que:

(a) As alternativas I, II e III são verdadeiras.

(b) Apenas a alternativa II é verdadeira.

(c) Apenas a alternativa III é verdadeira.

(d) Apenas a alternativa I é verdadeira.(X)

(e) As alternativas I e III são verdadeiras.

Solução:

I-(V) Seja H esse plano, temos que $(1)\vec{0} \in H$ (2) Quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$ $\vec{u}+\vec{v} \in H$ e (3) $\alpha\vec{u} \in H$.

II-(F) Na reta em questão já não consta a origem. Logo $\vec{0} \notin H$.

III-(F) Seja H essa região hachurada. Basta verificar que, por exemplo, $-2\vec{u} \notin H$ para qualquer $\vec{u} \in H$.

Q10 (1,0). Dados:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Considere as afirmativas abaixo:

$I.$ **O vetor $\vec{u}$ faz parte de $Nul(A)$.**

$II.$ **O vetor $\vec{v}$ faz parte de $Nul(A)$.**

$III.$ **O $Nul(A)$ é descrito por uma reta de todos múltiplos do vetor $\vec{m} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.**

É correto afirmarmos que:

(a) Apenas a alternativa I é verdadeira.

(b) As alternativas I e III são verdadeiras.(X)

(c) Apenas a alternativa III é verdadeira.

(d) As alternativas I, II e III são verdadeiras.

(e) Apenas a alternativa II é verdadeira.

Solução:

I-(V) Pois $A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$.

II-(F) Pois $A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 22 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$.

III-(V) Para analisarmos, devemos descobrir quais são os vetores $\vec{x}$ tais que $A\vec{x} = 0$. Ou seja, solucionar $A\vec{x} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ -5 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} (5L_1 + L_2) \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que x_3 é variável livre e da segunda linha temos que $-6x_2 - 9x_3 = 0$ ou ainda que $x_2 = -\frac{3}{2}x_3$. Da linha um temos que $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$ ou ainda que $x_1 = 3x_2 + 2x_3$, mas como temos x_2 ficamos com o resultado $x_1 = 3\left(-\frac{3}{2}x_3\right) + 2x_3$ e por fim que $x_1 = -\frac{5}{2}x_2$.

Isso mostra que na verdade o $Nul(A)$ é descrito por

$$Nul(A) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}x_3 \\ -\frac{3}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, verdadeiro.