Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Instituto de Matemática - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Prof. Julio Cesar Lombaldo Fernandes

MAT01355 - Álgebra Linear

Prova Área 2 - Turma E2. (GABARITO)

- As questões devem ser assinaladas a caneta;
- No final da prova temos 4 folhas de rascunho;
- Toda questão é de múltipla escolha e possui apenas uma alternativa correta;
- Não é permitido o uso de cálculadora;
- Preencher a tabela abaixo com um X indicando a alternativa correta (questões não preenchidas na tabela serão consideradas nulas);

Nome:____ **Cartão:**____________

TABELA DE RESPOSTAS FINAIS:

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
(a)									X	
(b)			X							X
(c)		X								
(d)				X						
(e)						X	X	X		
Pesos:	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

OBSERVAÇÕES: esta prova contou com duas questões com erros de digitação e que acarretaram em anulação das mesmas. Isto é, em ambas questões 1 e 5, todos ganharam os pontos na correção final.

Q1: (1,0) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É correto afirmar que $det(AB)$ vale:

(a) -9.

(b) 15.

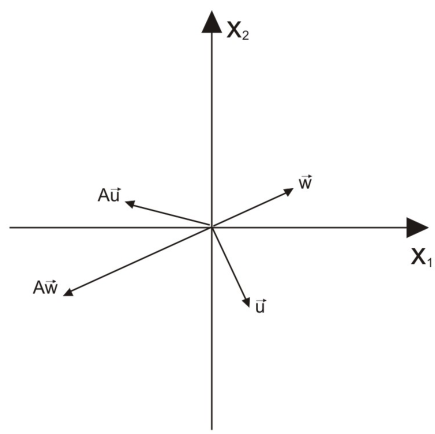
(c) -15.

(d) 9.

(e) -6.

Solução: QUESTÃO ANULADA. Resposta correta 54 (erro de digitação nas respostas), pois $det(AB) = det(A).det(B) = (-9)(-6) = 54$

Q2: (1,0) Dado o conjunto de vetores no plano abaixo descrito:



Então pode-se dizer que:

(a) $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são autovetores relativos a matriz A.

(b) Somente $\vec{u}$ é autovetor relativo a matriz A.

(c) Somente $\vec{w}$ é autovetor relativo a matriz A. (X)

(d) $\vec{u}$ e $\vec{w}$ não são autovetores relativos a matriz A.

(e) Todos são autovetores relativos a matriz A.

Solução:

Pelo gráfico $A\vec{w}$ é multiplo de $\vec{w}$, definição de autovetor

Q3: (1,0) Dada a matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Sobre seus autovalores e autovetores, é correto afirmar que:

(a) 3 e 7 são autovalores com autovetores $[1, -1]^T$ e $[1, 1]^T$, respectivamente.

(b) 3 e -7 são autovalores com autovetores $[3, 1]^T$ e $[1, -3]^T$, respectivamente.(X)

(c) 2 e -6 são autovalores com autovetores $[3, -1]^T$ e $[1, 3]^T$, respectivamente.

(d) -3 e 7 são autovalores com autovetores $[1, -1]^T$ e $[1, -1]^T$, respectivamente.

(e) -2 e 6 são autovalores com autovetores $[3, -1]^T$ e $[1, 1]^T$, respectivamente.

Solução:

Ao montar $det(A-\lambda I)=0$ temos que $(2-\lambda)(-6-\lambda)-6=0$, ou ainda, $\lambda^2+4\lambda-21=0$ cujas raízes são 3 e -7 o que já soluciona a questão.

Q4: (1,0) Seja A uma matriz diagonalizavel e P a matriz cujas colunas são autovetores de A, então uma maneira de calcular A^k é:

(a) Através de P^kDP^{-1} onde D é matriz diagonal com os elementos na diagonal iguais aos de A.

(b) Através de PD^kP^{-1} onde D é matriz triagular superior com os elementos iguais os de A.

(c) Através de $P^kD^kP^{-k}$ onde D é matriz diagonal os elementos digonais sendo os autovalores de A.

(d) Através de PD^kP^{-1} onde D é matriz diagonal com os elementos digonais sendo os autovalores de A.(X)

(e) Através de PDP^{-1} onde D é matriz diagonal com os elementos digonais sendo os autovalores de A.

Solução:

$A^k=(PDP^{-1})^k=(PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1})=PDDDD..DP^{-1}=PD^kP^{-1}$

Q5: (1,0) Considere a seguinte matriz de ordem 3×3:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

É sabido que seus autovalores são $\lambda=9$ e $\lambda=2$, sendo esse último de multiplicidade 2. Então pode-se dizer que:

(a) O autovalor $\lambda=9$ tem autoespaço com dimensão 1 e $\{[1,0,-1]^T\}$ é uma base para esse autoespaço.

(b) O autovalor $\lambda=2$ tem autoespaço com dimensão 1 e $\{[2,1,-1]^T\}$ é uma base para esse autoespaço.

(c) O autovalor $\lambda=9$ tem autoespaço com dimensão 2 e $\{[1,2,-1]^T,[3,1,9]^T\}$ é uma base para esse autoespaço.

(d) O autovalor $\lambda=2$ tem autoespaço com dimensão 2 e $\{[1,2,0]^T,[-3,0,1]^T\}$ é uma base para esse autoespaço.

(e) O autovalor $\lambda=2$ tem autoespaço com dimensão 2 e $\{[1,2,0]^T,[0,1,3]^T\}$ é uma base para esse autoespaço.

Solução: QUESTÃO ANULADA. A última linha deveria ser 3,0,0 e não 3,0,2. O que tornaria os autovalores corretos e restante da questão também.

Q6: (1,0) Considere as afirmativas abaixo:

$I.$ **Os vetores** $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **e** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **formam um conjunto ortonormal.**

$II.$ **Os vetores** $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$**,** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$**,** $\begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$ **formam um conjunto ortogonal.**

$III.$ **Os vetores** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ **e** $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ **não formam um conjunto ortogonal, pois o ângulo entre eles é de 45º.**

É correto afirmarmos que:

(a) Apenas a alternativa I é verdadeira.

(b) Apenas a alternativa II é verdadeira.

(c) Apenas a alternativa III é verdadeira.

(d) As alternativas I, II e III são verdadeiras.

(e) As alternativas II e III são verdadeiras. (X)

Solução:

I- (F) Em um conjunto ortonormal todos vetores devem ter norma 1. Nesse caso ambos tem norma $\sqrt{2}$.

II- (V) Seu produto escalar é zero sempre dois a dois.

III- (V) Chamando os vertores de u e v, respectivamente, temos que $\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo $\theta = 45º$.

Q7.(1,0) Considere as seguintes afirmações sobre projeções:

$I.$ **A projeção de um vetor** $\vec{u}$ **sobre um vetor** $\vec{v}$ **é dada por** $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\vec{v}.\vec{v}}\right)\vec{v}$**;**

$II.$ **A projeção de um vetor** $\vec{u}$ **sobre um vetor paralelo é o próprio vetor** $\vec{u}$**;**

$III.$ **A projeção de** $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **sobre** $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ **é dada por** $\begin{bmatrix} 2/9 \\ 8/9 \\ 2/9 \end{bmatrix}$**.**

É correto afirmarmos que:

(a) Apenas a alternativa I é verdadeira.

(b) Apenas a alternativa II é verdadeira.

(c) Apenas a alternativa III é verdadeira.

(d) As alternativas II e III são verdadeiras.

(e) As alternativas I, IIe III são verdadeiras.(X)

Solução:

I- (V) Sim, é a definição de projeção.

II- (V) Bastava desenhar a analisar geometricamente, ou ainda, analisiticamente, seja $\vec{p}$ um vetor paralelo a $\vec{u}$ então $\vec{p} = a\vec{u}$ e a projeção em questão é dada por $proj_{\vec{p}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}.\vec{p}}{\vec{p}.\vec{p}}\right)\vec{p} = \left(\frac{\vec{u}.a\vec{u}}{a\vec{u}.a\vec{u}}\right)a\vec{u} = \frac{a}{a^2}\left(\frac{\vec{u}.\vec{u}}{\vec{u}.\vec{u}}\right)a\vec{u} = \frac{a}{a^2}a\vec{u} = \vec{u}$.

III- (V) Ao calcular usando a fórmula de I viamos que é verdadeiro.

Q8 (1,0). Dentre as várias fatorações matriciais encontra-se a fatoração QR que consiste em:

(a) Fatorar uma matriz $A_{m\times n}$ no produto de duas matriz, sendo uma delas $Q_{m\times n}$ cujas colunas são as de A após serem ortogonalizadas via Processo de Gram-Schmidt e a outra $R_{n\times n}$ triangular inferior cujos elementos são os coeficientes vindos das projeções utilizadas no Processo de ortogonalização.

(b) Fatorar uma matriz $A_{m\times n}$ na soma de duas matriz, sendo uma delas $Q_{m\times n}$ cujas colunas são as de A após serem ortogonalizadas via Processo de Gram-Schmidt e a outra $R_{n\times n}$ triangular superior cujos elementos são os coeficientes vindos das projeções utilizadas no Processo de ortogonalização.

(c) Fatorar uma matriz $A_{m\times n}$ na soma de duas matriz, sendo uma delas $Q_{m\times n}$ cujas colunas são as de A após serem ortogonalizadas via Processo de Gram-Schmidt e a outra $R_{n\times n}$ triangular superior cujos elementos são os coeficientes vindos das projeções utilizadas no Processo de ortogonalização.

(d) Fatorar uma matriz $A_{m\times m}$ no produto de duas matriz, sendo uma delas $Q_{m\times m}$ cujas colunas são as de A após serem ortogonalizadas via Processo de Gram-Schmidt e a outra $R_{m\times n}$ triangular superior cujos elementos são os autovalores de A.

(e) Fatorar uma matriz $A_{m\times n}$ no produto de duas matriz, sendo uma delas $Q_{m\times n}$ cujas colunas são as de A após serem ortogonalizadas via Processo de Gram-Schmidt e a outra $R_{n\times n}$ triangular superior cujos elementos são os coeficientes vindos das projeções utilizadas no Processo de ortogonalização.(X)

Solução:

A alternativa correta é auto-explicativa.

Q9 (1,0). Considere o conjunto de pontos no plano:

$$\{(1,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$$

Se desejamos encontrar uma reta que melhor se aproxima desses pontos via mínimos quadrados (caso linear), usamos:

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i x_i \\ \sum y_i \end{bmatrix}$$

essa reta será:

(a) $y = 0,8x + 0,5$.(X)

(b) $y = 0,8x + 1$.

(c) $y = 0,5x - 0,5$.

(d) $y = -0,8x + 0,5$.

(e) $y = 0.8x + 2$.

Solução:

Como $\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i x_i \\ \sum y_i \end{bmatrix}$ fica $\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 10 \end{bmatrix}$

Cuja a solução é $0,8$ e $0,5$ e portanto $y = 0,8x + 0,5$.

Q10 (1,0). O processor de Gram-Schmidt consiste em criar uma base de vetores ortogonais atráves de uma dada base L.I., se os vetores dados são $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$. Fazemos

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{x}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{x}_2 - \left(\frac{\vec{x}_2.\vec{v}_1}{\vec{v}_1.\vec{v}_1}\right)\vec{v}_1 \\ \vec{v}_3 &= \vec{x}_3 - \left(\frac{\vec{x}_3.\vec{v}_1}{\vec{v}_1.\vec{v}_1}\right)\vec{v}_1 - \left(\frac{\vec{x}_3.\vec{v}_2}{\vec{v}_2.\vec{v}_2}\right)\vec{v}_2 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Então dada a base L.I.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É correto que após a aplicação do processo de Gram-Schmidt obteremos uma base ortogonal dada por:

(a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.(X)

(c) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(d) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

(e) $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Solução:

Bastava aplicar o processo até $\vec{v}_3$.