

Q1	Q2	Q3	Q4	Total

NOME: _____ CARTÃO: _____

Q1) (3,0 pontos) Considere a função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Obtenha o desenvolvimento de $f(x)$ em Série de Fourier.

Solução:

- A função $f(x) = |x|$ é uma função **par**, pois:

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

Portanto, sua série de Fourier conterá apenas termos de cosseno:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

- Cálculo de a_0 :**

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

- Cálculo de a_n :**

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx$$

Usando integração por partes:

Seja

$$u = x \Rightarrow du = dx, \quad dv = \cos(nx) dx \Rightarrow v = \frac{\sin(nx)}{n}$$

Aplicando:

$$\int x \cos(nx) dx = \frac{x \sin(nx)}{n} - \int \frac{\sin(nx)}{n} dx = \frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Assim,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi \sin(n\pi)}{n} + \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} \right)$$

Como $\sin(n\pi) = 0$ e $\cos(n\pi) = (-1)^n$, temos:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

Isso nos dá:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Conclusão: O desenvolvimento de $f(x) = |x|$ em série de Fourier no intervalo $[-\pi, \pi]$ é:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi} \cos(nx)$$

Q2) (2,0 pontos) Considere o problema clássico de Sturm–Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < L,$$

Determine os autovalores e autofunções com condições de contorno homogêneas do tipo $y(0) = 0$ e $y'(L) = 0$ avaliando todos os possíveis casos para λ .

Solução:

Vamos considerar os três casos possíveis para o parâmetro espectral λ :

• **Caso 1:** $\lambda = 0$

A equação se reduz a:

$$y'' = 0 \Rightarrow y(x) = Ax + B$$

Aplicando as condições de contorno:

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y'(L) = A = 0 \Rightarrow A = 0$$

Portanto, a única solução é a trivial $y(x) \equiv 0$. Não há autovalores nesse caso.

• **Caso 2:** $\lambda < 0$

Seja $\lambda = -\mu^2$, com $\mu > 0$. A equação fica:

$$y'' - \mu^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Aplicando as condições de contorno:

$$y(0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$y'(x) = A\mu e^{\mu x} - B\mu e^{-\mu x} = A\mu(e^{\mu x} + e^{-\mu x}) \Rightarrow y'(L) = A\mu(e^{\mu L} + e^{-\mu L}) = 0$$

Como $e^{\mu L} + e^{-\mu L} > 0$, temos $A = 0 \Rightarrow B = 0$

Portanto, só existe a solução trivial. Logo, nenhum autovalor negativo.

• **Caso 3:** $\lambda > 0$

Seja $\lambda = \omega^2$, com $\omega > 0$. A equação é:

$$y'' + \omega^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

Aplicando as condições de contorno:

$$y(0) = A = 0 \Rightarrow y(x) = B \sin(\omega x)$$

$$y'(x) = B\omega \cos(\omega x) \Rightarrow y'(L) = B\omega \cos(\omega L) = 0$$

Para existir uma solução não trivial, $B \neq 0$ e $\cos(\omega L) = 0$

$$\Rightarrow \omega L = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Logo:

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad \lambda_n = \omega_n^2 = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2$$

E as autofunções associadas são:

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Conclusão:

- Os autovalores são:

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- As autofunções associadas são:

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Q3) (3,0 pontos) Considere o problema da EDP da Onda dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Determine a solução geral $u(x, t)$ da EDP.

Solução:

Usamos o método de **separação de variáveis**, assumindo uma solução da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$ e substituindo na equação:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Obtemos dois problemas ODE separados:

$$(1) \ X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$(2) \ T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0$$

Condições de contorno para $X(x)$:

$$X(0) = 0, \quad X'(L) = 0$$

Solução de (1): Consideramos o caso $\lambda = \omega^2 > 0$:

$$X(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

Aplicando $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$, então:

$$X(x) = B \sin(\omega x)$$

Aplicando $X'(L) = 0$:

$$X'(x) = B\omega \cos(\omega x) \Rightarrow X'(L) = B\omega \cos(\omega L) = 0$$

Para solução não trivial ($B \neq 0$), deve-se ter $\cos(\omega L) = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{(2n-1)\pi}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Portanto:

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad \lambda_n = \omega_n^2 = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2$$

Autofunções associadas:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Solução da equação temporal (2):

$$T_n(t) = C_n \cos(c\omega_n t) + D_n \sin(c\omega_n t)$$

Solução geral:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(c\omega_n t) + D_n \sin(c\omega_n t)] \sin(\omega_n x)$$

Com $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$

Condições iniciais:

- $u(x, 0) = f(x) \Rightarrow \sum C_n \sin(\omega_n x) = f(x)$ série de Fourier em senos

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\omega_n x) dx$$

- $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \Rightarrow \sum D_n c\omega_n \sin(\omega_n x) = 0 \Rightarrow D_n = 0$

Solução final:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(c\omega_n t) \sin(\omega_n x), \quad \text{com} \quad C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\omega_n x) dx$$

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$$

Q4) (2,0 pontos) Considere o caso de encontrar a função de onda do exercício anterior com $L = \pi$, $c = 1$ e função de onda inicial $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$. (Dica: Use que $\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2}$)

Solução: Da questão anterior, sabemos que a solução geral para este problema com condições de contorno mistas é:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t) \text{sen}(\omega_n x)$$

com

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad L = \pi \Rightarrow \omega_n = \frac{(2n-1)}{2}$$

Logo:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}t\right) \text{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$

Cálculo dos coeficientes C_n :

Como $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, usamos:

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) dx$$

Esta é uma integral do tipo ortogonal, então apenas um termo será diferente de zero — aquele para o qual:

$$\frac{2n-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 1$$

Portanto, apenas $C_1 \neq 0$. Vamos calcular:

$$C_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

Usamos a identidade sugerida:

$$\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

Assim:

$$C_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(x)}{2} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos(x)) dx = \frac{1}{\pi} [x - \text{sen}(x)]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} (\pi - 0) = 1$$

Solução final:

$$u(x, t) = \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Formulário:

Séries de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_c^{c+2p} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_c^{c+2p} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_c^{c+2p} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$

EDPs:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$$