Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Instituto de Matemática - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Prof. Julio Lombaldo Fernandes

MAT01068 - Análise Real I

PROVA ÁREA 1 - GABARITO

Esta Prova é individual e com consulta apenas do caderno. O peso da prova é de 6,0 pontos. Usem apenas as folhas entregues pelo professor para resolução das questões.

Observação: Em cada questão consta apenas uma possível solução, ressaltamos que podem sempre existir maneiras ou estratégias diferentes de demonstração.

Nome:____ **Cartão:**_______________

Questão 1. (1,0 ponto) Mostre que, se $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros termos pares é $n(n+1)$.

Solução:

Vamos proceder usando o PIM (Princípio da Indução Matemática). Começamos definindo um conjunto X da forma:

$$X = \{m \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{m} 2k = m(m+1)\}$$

Passo 1: $\vdash 1 \in X$.

De fato, temos que $2 = 1(1+1)$.

Passo 2: $\vdash$ se $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$.

Partindo de

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 2k = 2+4+6+...+2n+2(n+1) &= n(n+1)+2(n+1) \ \text{(pela Hip. de Indução)} \\
&= (n+2)(n+1) \\
&= (n+1)(n+2) \\
&= (n+1)(n+1+1) \\
&= (n+1)((n+1)+1)
\end{aligned}$$

Assim, temos que $n+1 \in X$ e portanto $X = \mathbb{N}$. Isso completa a demomnstração.

Questão 2. (1,0 ponto) Usando o conceito de cardinalidade, mostre que todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

Solução:

Em outras palavras o que devemos demonstrar é que, se, Y for algum subconjunto não vazio de um conjunto finito X, então $card(Y) \leq card(X)$ e que $card(Y) = card(X) \Leftrightarrow Y = X$.

Passo 1: $\vdash$ vale para $card(X) = 1$.

Começamos supondo X finito e não vazio. Se $card(X) = 1 \Rightarrow Y = X$ (por Y ser subconjunto não vazio).

Passo 2: Se $card(X) > 1$ e vamos supor que $card(X) = n$ e mostrar por indução que vale a afirmação para $n + 1$.

Assim, supondo que $card(X) = n + 1$ e $Y \subseteq X$ com Y não vazio.

Se $Y = X$ ok! (pois $card(Y) = card(X)$ e vale para $n + 1$).

Se $Y \neq X$ vamor tomar um elemento de X, mas não de Y, digaos $k \in X - Y$. Assim $X - \{k\}$ é equipotente a $I_n = I_{n+1} - \{n + 1\}$ e $card(X - \{k\}) = n$. Como

$$Y \subseteq X - \{k\}$$

o que implica Y finito pela hipótese de indução. Logo,

$$card(Y) \leq card(X - \{k\}) = n$$

Assim, $card(Y) \leq n < n + 1 \Rightarrow card(Y) < n + 1$, ou seja, também vale para $n + 1$, o que completa a demonstração.

Questão 3. (1,0 ponto) Se $x, y \in \mathbb{Z}$, mostre que $|x + y| \leq |x| + |y|$. (desigualdade triangular)

Solução:

Sabemos que para todo número inteiro, teremos a seguinte desigualdade sendo satisfeita:

$$-|a| \leq a \leq |a| \tag{1}$$

Como x e y são inteiros, temos que

$$\begin{aligned} -|x| \leq \quad x \quad \leq |x| \\ -|y| \leq \quad y \quad \leq |y| \end{aligned}$$

Somando essas duas desigualdades, temos que

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

Assim, segue que

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Questão 4. (1,5 ponto) Mostre que se $n \geq 4$ então $n^2 \leq 2^n$.

Solução:

Também podemos usar o PIM. Vamos usar como base de indução $n = 4$ e verificar o que acontece para $1, 2, 3$.

Primeiro, fazendo a verificação, temos que:

$$\begin{array}{rcll} 1^2 & \leq & 2^1 & \text{OK!} \\ 2^2 & \leq & 2^2 & \text{OK!} \\ 3^2 & \leq & 2^3 & \text{Não vale!} \end{array}$$

Passo 1: $\vdash$ vale para $n = 4$.

$$4^2 \leq 2^4 \Rightarrow 16 \leq 16 \quad \text{OK!}$$

Passo 2: $\vdash$ se vale para n implica que vale para $n + 1$.

Partindo de:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1 \quad \text{(pela hip. de indução)}$$

Agora queremos que validar que $2^n + 2n + 1 \leq 2^{n+1}$, mas para isso, basta mostrar que

$$2n + 1 \leq 2^n \tag{2}$$

Vamos assumir que vale (2) e prova-la posteriormente. Se (2) vale, então temos que

$$(n+1)^2 \leq 2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$$

o que completa a demonstração.

Verificando agora (2):

Vemos que vale para $n = 4$, pois $2.4 + 1 \leq 2^4$. Podemos também verificar que pelo PIM vale para $n + 1$ se vale para n. Como segue

$$2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 1 + 2 \leq 2^n + 2$$

Novamente, temos que verificar outra situação. Se vale que $2 < 2^n$, mas isso é imediato para $n \geq 4$. Logo a demonstração está completa.

Questão 5. (1,5 ponto) Mostre que vale a desigualdade de Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

para $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$.

Solução:

Vamos proceder usando o PIM. Começamos definindo um conjunto X da forma:

$$X = \{m \in \mathbb{N} : (1+x)^m \geq 1+mx\}$$

Passo 1: $\vdash 1 \in X$.

De fato, temos que $(1+x)^1 = 1+1.x$ para todo x (inclusive para $x > -1$).

Passo 2: $\vdash$ se $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$.

Partindo de

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) &\geq (1+nx)(1+x) \quad \text{(pela hip. de indução)} \\
&= 1+nx+x+nx^2 \\
&= 1+(n+1)x+nx^2
\end{aligned}$$

Mas temos que $nx^2 \geq 0$, pois $n \in \mathbb{N}$ e $x^2 \geq 0$ para $x > -1$. Logo $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$. Assim temos que

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

Portanto $n+1 \in X$ e $X = \mathbb{N}$. Isso completa a demonstração.