

LISTA DE EXERCÍCIOS 1 - ÁREA 3

Equações Diferenciais II - MAT01167 - Série de Fourier

@ julio.lombaldo@ufrgs.br

♥ Campus do Vale - UFRGS - Sala B119

🌐 juliolombaldo.com



SÉRIE DE FOURIER - GABARITO

NÍVEL DA LISTA

- Ex. 1. a) Seja $f(x) = x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, com extensão periódica de período 2π .
Note que $f(x)$ é uma função **ímpar**, pois $f(-x) = -f(x)$. Logo, a série de Fourier conterá apenas os termos do tipo $\sin(nx)$.
A série de Fourier de $f(x)$ será dada por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

onde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx.$$

Integração por partes: Seja $u = x \Rightarrow du = dx$ e $dv = \sin(nx)dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos(nx)$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right]$$

Como:

$$\int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 0 \quad (\text{para todo } n \in \mathbb{N}),$$

e

$$-\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + 0 = -\frac{\pi}{n} (-1)^n,$$

então:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} \right) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

Portanto, a série de Fourier de $f(x) = x$ é:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx).$$

b) Seja

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0), \\ 1, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

A função é **ímpar**, pois $f(-x) = -f(x)$. Logo, sua série de Fourier conterá apenas senos.

A série de Fourier de $f(x)$ é:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

onde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx.$$

Essa integral é direta:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} [\cos(n\pi) - \cos(0)] \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} [1 - (-1)^n] = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

Note que: - Se n for par: $(-1)^n = 1 \Rightarrow b_n = 0$ - Se n for ímpar:

$$(-1)^n = -1 \Rightarrow b_n = \frac{4}{\pi n}$$

Logo, a série de Fourier é:

$$f(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(nx) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right).$$

Intuitivo
Gráfico
Dificuldade



c) Seja $f(x) = x^2$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, com extensão periódica de período 2π .

Observe que $f(x)$ é **par**, pois $f(-x) = f(x)$. Logo, a série de Fourier conterá apenas cossenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

com

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx.$$

Calculando:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Agora os coeficientes a_n :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx.$$

Usamos integração por partes duas vezes. Resultado conhecido:

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Assim, a série de Fourier é:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

d) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ x, & x \in [0, \pi], \end{cases}$$

com extensão periódica de período 2π .

Essa função **não é par nem ímpar**, portanto a série de Fourier terá termos de cosseno e seno:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Vamos calcular os coeficientes.

Coeficiente a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Coeficientes a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx.$$

Integração por partes: Seja $u = x \Rightarrow du = dx, dv = \cos(nx)dx \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin(nx)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right]$$

Note que: $-\sin(n\pi) = 0, \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n} [\cos(n\pi) - 1]$

Logo:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left(0 - \frac{1}{n} \cdot \left(-\frac{1}{n} [\cos(n\pi) - 1] \right) \right) = \frac{1}{\pi n^2} (1 - (-1)^n)$$

Então: - Se n é par: $a_n = 0$ - Se n é ímpar: $a_n = \frac{2}{\pi n^2}$

Coeficientes b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx.$$

Resultado já conhecido (do item (a)):

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Série de Fourier:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n^2} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right).$$

- e) **Item (e):** Seja $f(x) = |x|$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, com extensão periódica de período 4π .
 Note que $f(x)$ é uma função **par**, pois $f(-x) = f(x)$. Portanto, a série de Fourier conterá apenas termos em cosseno:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Coefficiente a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} |x| dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi.$$

Coefficientes a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx.$$

Usamos integração por partes com: $-u = x \Rightarrow du = dx$ -
 $dv = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx \Rightarrow v = \frac{2}{n} \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2x}{n} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{2}{n} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx \right]$$

Primeiro termo:

$$\frac{2x}{n} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{n} \sin(n\pi) = 0$$

Segundo termo:

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \left[-\frac{2}{n} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n} [\cos(n\pi) - 1]$$

Logo:

$$a_n = -\frac{2}{\pi n} \cdot \left(-\frac{2}{n}\right) [\cos(n\pi) - 1] = \frac{4}{\pi n^2} (1 - (-1)^n)$$

- Se n é par: $a_n = 0$ - Se n é ímpar: $a_n = \frac{8}{\pi n^2}$

Série de Fourier:

$$f(x) = \pi + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{8}{\pi n^2} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) = \pi + \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(\frac{3x}{2}\right) + \dots \right)$$

- f) Seja $f(x) = 1 - |x|$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, com extensão periódica de período 2π .

A função é **par**, pois $f(-x) = f(x)$. Portanto, sua série de Fourier terá apenas cossenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Coefficiente a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - |x|) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x) dx = \frac{2}{\pi} \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\pi - \frac{\pi^2}{2} \right) = 2 - \pi.$$

$$a_0 = 2 - \pi$$

Coefficientes a_n :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x) \cos(nx) dx$$

Separando a integral:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos(nx) dx - \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \right]$$

Sabemos: $-\int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 0$ - $\int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$

Logo:

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right) = \frac{2}{\pi n^2} (1 - (-1)^n)$$

Assim: - Se n for par: $a_n = 0$ - Se n for ímpar: $a_n = \frac{4}{\pi n^2}$

Série de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2}(2 - \pi) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \cos(nx) = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} \cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \dots\right)$$

g) Seja $f(x) = |\sin(x)|$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, com extensão periódica de período 2π .

Note que $f(x)$ é **par**, pois $|\sin(-x)| = |\sin(x)|$. Assim, sua série de Fourier conterá apenas termos de cosseno:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

com os coeficientes dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \frac{2}{\pi} [-\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (1+1) = \frac{4}{\pi}.$$

Agora os coeficientes a_n para $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) dx.$$

Usamos a identidade trigonométrica:

$$\sin(x) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)],$$

então:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)] dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin((n+1)x) dx + \int_0^{\pi} \sin((n-1)x) dx \right].$$

Cada integral é do tipo:

$$\int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \left[-\frac{1}{k} \cos(kx) \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{k} [\cos(k\pi) - \cos(0)] = \frac{1}{k} [1 - (-1)^k].$$

Logo: - Quando k é par: $\cos(k\pi) = 1 \Rightarrow \text{integral} = 0$ - Quando k é

ímpar: $\cos(k\pi) = -1 \Rightarrow \text{integral} = \frac{2}{k}$

Então: - $a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n+1} + \frac{2}{n-1} \right)$, se $n+1$ e $n-1$ ímpares.

Isso ocorre quando n é par.

Portanto: - Se n é ímpar: $a_n = 0$ - Se n é par:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2n}{n^2 - 1} = \frac{4n}{\pi(n^2 - 1)}$$

Série de Fourier:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{4n}{\pi(n^2 - 1)} \cos(nx) = \frac{2}{\pi} + \frac{8}{3\pi} \cos(2x) + \frac{24}{15\pi} \cos(4x) + \dots$$

Ex. 2. a) Seja $f(x) = 2 - |x|$ no intervalo $[-2, 2]$, com extensão periódica de período 4.

Note que $f(x)$ é uma função **par**, pois $f(-x) = f(x)$. Assim, a série de Fourier terá apenas termos de cosseno:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Coeficiente a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_0^2 (2 - x) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 4 - 2 = 2.$$

Coeficiente a_n :

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^2 (2 - x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx.$$

Integração por partes, com: - $u = 2 - x \Rightarrow du = -dx$ - $dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \Rightarrow v = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

Resultado da integral (forma conhecida):

$$a_n = \frac{8}{(n\pi)^2} (1 - (-1)^n) \Rightarrow a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ \frac{16}{n^2\pi^2}, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Série de Fourier:

$$f(x) = 1 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{16}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

b) Seja $f(x) = 1 - |x|$ em $[-1, 1]$, com extensão periódica de período 2.

A função é **par**. Logo, a série de Fourier terá apenas cossenos:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x).$$

Coefficiente a_0 :

$$a_0 = \int_{-1}^1 (1 - |x|) dx = 2 \int_0^1 (1 - x) dx = 2 \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1.$$

Coefficientes a_n :

$$a_n = 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(n\pi x) dx.$$

Resultado conhecido (pode ser obtido via integração por partes):

$$a_n = \frac{4}{(n\pi)^2} (1 - (-1)^n) \Rightarrow a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ \frac{8}{n^2\pi^2}, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Série de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)$$

c) Item (c): Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-2, -1.5] \cup [1.5, 2], \\ 1, & x \in [-1.5, 1.5], \end{cases}$$

com extensão periódica de período 4.

A função é **par**, então sua série de Fourier conterá apenas cossenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Coefficiente a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

Coefficientes a_n :

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^{1.5} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx.$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right] \Rightarrow a_n = \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right).$$

Série de Fourier:

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$